$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\,\varepsilon^{\gamma}_{(\alpha}\, a_{\beta)\gamma} + \langle 2 \rangle . \qquad (16)$$

Из (14) и (16) имеем

$$\nabla a_{\alpha\beta} = -2\,\varepsilon^{\gamma}_{(\alpha}\, a_{\beta)\gamma} . \qquad (17)$$

Таким образом,на многообразии V_{n-1} имеем

$$b_i\,\omega^i = a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta,i}\,\omega^i = a^{\alpha\beta}\nabla a_{\alpha\beta} = -2a^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma}_{(\alpha}\, a_{\beta)\gamma} = -2\,\varepsilon^{\alpha}_{\alpha} , \qquad (18)$$

откуда и из(12) при $\omega^n = 0$ получаем

$$A = 1 - \tfrac{1}{2}\, b_i\,\omega^i + \langle 2 \rangle . \qquad (19)$$

Отсюда возникает геометрическая интерпретация $(n-2)$-мерной плоскости α_{n-2} .Она является касательным подпространством к поверхности уровня функции $A(Q^*)/V_{n-1}$.

Библиографический список

1.С о п и н а Е.П. Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвузовский темат.сб.научн.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1976.Вып.7.С.105-110.

2.С о п и н а Е.П. О полях геометрических объектов на многообразии V_{n-1} //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.науч.тр./ Калининградский ун-т.Калининград,1981.Вып.12.С.93-95.

3.А н д р е е в Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q) //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1975.Вып.6.С.5-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ ФИГУР В МНОГОМЕРНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.Н.Х у д е н к о

В четырехмерном проективном пространстве P_4 рассматриваются пары трехпараметрических семейств (конгруэнций),образованных коникой C и двумерной плоскостью S -пары (C,S).

На многомерный случай обобщено понятие расслоения от конгруэнции коник C к конгруэнции плоскостей, введенное в [1] для трехмерного проективного пространства.

1. При надлежащем выборе проективного репера [2] локальная коника $C \in (C,S) \subset P_4$ будет определяться системой уравнений

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^a = 0, \qquad (1)$$

а конгруэнция (C) коник - системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega^{\alpha}_{a} = M^{\alpha\beta}_{a}\,\omega_{\beta}, & \omega^{j}_{i} = M^{j\alpha}_{i}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{5}_{4} = M^{5\alpha}_{4}\,\omega_{\alpha}, \\ \omega^{3}_{i} = M^{3\alpha}_{i}\,\omega_{\alpha}, & \omega^{i}_{3} = M^{i\alpha}_{3}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{4}_{5} = M^{4\alpha}_{5}\,\omega_{\alpha}, \\ \omega^{4}_{3} = M^{4\alpha}_{3}\,\omega_{\alpha}, & \omega^{4}_{i} = M^{4\alpha}_{i}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{1}_{1} + \omega^{2}_{2} - 2\omega^{3}_{3} = M^{1\alpha}_{1}\,\omega_{\alpha}, \end{cases} \qquad (2)$$

$$(\alpha,\beta = \overline{1,3}\,; \quad i,j = \overline{1,2}\,; \quad i \neq j\,, \quad a = \overline{4,5}\,).$$

Будем называть пару (C,S) расслояемой от конгруэнции коник C к конгруэнции ассоциированных двумерных плоскостей [2] ,если к конике C можно присоединить однопараметрическое семейство $\mathcal{F}_{\sigma}$ поверхностей,такое,что касательная гиперплоскость к каждой поверхности $\mathcal{F}_{\sigma}$ семейства,построенная в точке ее пересечения с коникой

C ,содержит двумерную плоскость S . (Плоскость S является пересечением трех касательных гиперплоскостей к поверхностям $(A_1), (A_2), (A_3)$,где A_1 и A_2 -фокальные точки коники C ,а A_3 - полярно им сопряжена относительно коники C.)

Зададим конику C параметрически:

$$M = A_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 A_2 + \sigma A_3 , \tag{3}$$

где M -текущая точка коники,а σ-параметр.Аналитическое условие расслоения согласно определению сведется к требованию:

$$(M, dM, A_3, A_4, A_5) = 0 . \tag{4}$$

Из соотношения (4),с учетом соотношений (2) и (3),получаем

$$\sigma d\sigma = \frac{1}{4}\sigma^4 \omega_2^1 + \frac{1}{2}\sigma^3 \omega_3^1 + \frac{1}{2}\sigma^2(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \sigma\omega_3^2 - \omega_1^2 . \tag{5}$$

Дифференцируя уравнение (5) внешним образом,с учетом его же,получаем для σ уравнение шестой степени

$$m_z \sigma^z = 0 \qquad (z = \overline{0,6}) \tag{6}$$

Так как уравнение (6) должно удовлетворяться тождественно (относительно σ),то все $m_z = 0$. Тогда получаем систему квадратичных уравнений:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0 , \quad \omega_1^2 \wedge \omega_3^2 = 0 , \quad \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_5^1 = 0,$$

$$2\omega_2^1 \wedge \omega_3^2 - (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) \wedge \omega_3^1 + 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 + 2\omega_3 \wedge \omega_5^1 = 0,$$

$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^1 + \omega_1 \wedge \omega_5^1 - \tag{7}$$

$$- \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2^4 \wedge \omega_4^2 - \omega_2 \wedge \omega_5^2 = 0,$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^2 + \omega_1 \wedge \omega_5^2 = 0,$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_1^2 + (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) \wedge \omega_3^2 - \omega_3^4 \wedge \omega_4^2 - \omega_3 \wedge \omega_5^2 = 0.$$

П р е д л о ж е н и е.Если двумерная плоскость стационарна,то пара (C,S) расслояема.

Доказательство предложения следует из того,что

$$\omega_3^i = \omega_a^i = 0 \tag{8}$$

II.Понятие расслоения от конгруэнции коник к конгруэнции ассоциированных плоскостей можно обобщить на случай n-мерного проективного пространства.
В этом случае локальная коника C и конгруэнция (C) определяются соответственно системами

$$2x^1 x^2 - (x^3)^2 = 0 , \quad x^a = 0 . \tag{9}$$

$$\omega_\alpha^{\hat a} = M_\alpha^{\hat a i}\omega_i , \quad \omega_3^{\hat\imath} = M_3^{\hat\imath i}\omega_i , \quad \omega_{\hat\jmath}^{\hat\alpha} = M_{\hat\jmath}^{\hat\alpha i}\omega_i ,$$

$$\omega_a^\alpha = M_a^{\alpha i}\omega_i , \quad \omega_{\hat\imath}^3 = M_{\hat\imath}^{3i}\omega_i , \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = M_1^{1i}\omega_i \tag{10}$$

$(\alpha = \overline{1,3} ; \ \hat a = \overline{4,n} ; \ i,j = \overline{1,n-1} ; \ \hat\imath, \hat\jmath = \overline{1,2} ; \ \hat\alpha = \overline{2,3} ; \ a = \overline{3,n+1})$.

Будем называть пару (C,S_{n-2}) расслояемой (где C - коника,а S_{n-2} -ассоциированная с ней (n-2)-мерная плоскость [3]),если к конике можно присоединить однопараметрическое семейство $\mathcal{F}_\sigma$ поверхностей такое,что касательная гиперплоскость к каждой поверхности $\mathcal{F}_\sigma$ семейства содержит (n-2)-мерную плоскость S_{n-2} . Проводя рассуждения,аналогичные п.I,получим соотношения

$$\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0 , \quad \omega_1^2 \wedge \omega_3^2 = 0 ,$$

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^{\hat a} \wedge \omega_{\hat a}^1 + \omega_2 \wedge \omega_{n+1}^1 = 0, \tag{11}$$

$$\omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) \wedge \omega_3^1 + 2\omega_3^{\hat a} \wedge \omega_{\hat a}^1 + 2\omega_3 \wedge \omega_{n+1}^1 = 0,$$

$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - 2\omega_2^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^{\hat a} \wedge \omega_{\hat a}^1 + 2\omega_1 \wedge \omega_{n+1}^1 -$$

$$- \omega_2^{\hat a} \wedge \omega_{\hat a}^2 - \omega_2 \wedge \omega_{n+1}^2 = 0 ,$$

$$2\omega_3^1\wedge\omega_3^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^1-2\omega_2^3\wedge\omega_3^2+\omega_1^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^1+2\,\omega_1\wedge\omega_{n+1}^1-$$
$$-\,\omega_2^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^2-\omega_2\wedge\omega_{n+1}^2=0,$$
$$\omega_3^1\wedge\omega_1^2+(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)\wedge\omega_3^2-\omega_3^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^2-\omega_3\wedge\omega_{n+1}^2=0,$$
$$\omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^2+\omega_1\wedge\omega_{n+1}^2=0\ ,$$
определяющие совместно с (10) расслояемую пару (C, S_{n-2}). Из анализа соотношений (11) следует утверждение, аналогичное предложению п 1.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве: Тр. Геометр .семинара | ВИНИТИ АН СССР. М.,1969.Т.2.С.179-206.

2. Х у д е н к о В.Н. Многообразия коник в P_4 с неопределенными фокальными поверхностями // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб.науч .тр. | Калинингр. ун-т.Калининград,1981.Вып.12. С.118-120.

3. Х у д е н к о В.Н. О связности в расслоении, ассоциированном с многообразием многомерных квадрик || Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.науч .тр. | Калинингр.ун-т.Калининград. 1984.Вып.15.С.96-99.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ,ОБРАЗОВАННЫЕ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

В.П. Ц а п е н к о

В работе исследуются в трехмерном проективном пространстве конгруэнции K_2 пар фигур (P,Q), порожденных квадрикой Q и неинцидентной ей точкой P. Для одного частного класса таких конгруэнций получено безинтегральное представление.

§1.Конгруэнции K_2^{11}

Поставим в соответствие каждой паре фигур (P,Q) репер $\tau=\{\bar A_0,\bar A_1,\bar A_2,\bar A_3\}$ следующим образом: вершину A_0 совместим с точкой P, вершины A_1 и A_2 поместим в касательную плоскость к поверхности (A_0) в точке A_0 так, чтобы они были инцидентны конике C и поляре точки A_0 относительно этой коники. Коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q. В качестве вершины A_3 выбран полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q. Уравнение квадрики в репере τ может быть приведено к виду: $\mathcal{F}\equiv(x^0)^2+(x^3)^2-2x^1x^2=0$. Рассмотрим конгруэнции K_2^{11}, для которых ассоциированная квадрика Q_i $(i=1,2)$ [1] распадается в пару плоскостей $A_0A_iA_3$ и $A_0A_1A_2$, причем поверхность (A_0) не является развертывающейся. Такие конгруэнции являются подклассом конгруэнций $(P,Q)^*_{2,2}$ [1]. Конгруэнции K_2^{11} определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_i^j=0,\quad \omega_i^0=\omega_0^j,$$
$$\omega_i^3=a\omega_0^j,\quad \omega_3^i=g\,\omega_j^3,\quad da=0,\quad dg=0, \tag{1}$$
$$\omega_0^0=0,\quad \omega_3^3=0,\quad \omega_1^1+\omega_2^2=0\ \ (i,j=1,2;\ i\neq j)$$

с произволом 14 постоянных.

Анализируя систему (1), убеждаемся в справедливости